| | |
|---|---|
| Title | Operators ノ one-parameter Group ニツイテ |
| Author(s) | 深宮, 政範 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 199 p.255-p.263 |
| Issue Date | 1940-07-08 |
| oaire:version | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74799 |
| rights | |
| Note | |

869 Operators ノ one-parameter Group ニツイテ

深宮 政範 (阪大)

$U_t$, $\infty < t < \infty$ ヲ Banach 空間 $E$ ヲ $E$ 自身ヘ移ス isometric ナ operators ノ one-parametric group トシマス: 即チ

(i) $\|U_t\| = 1$, (ii) $U_t U_s = U_{t+s}$,

(iii) $U_t$ ハ weakly measurable ( $f(U_t x)$ ガ凡テノ $x \in E$ 及ビ $f \in \overline{E}$ ニ対シテ $t$ ノ numerical measurable function デアル)(1)

既ニ Stone, von Neumann ニヨッテ $E$ ガ Hilbert 空間デ, $U_t$ ガ unitary operator ナル場合ニツイテカヽル group $U_t$ ノ analytical representation ガ論ゼラレテ居リマス。(Stone, Annals of Math., 33 (1931), pp643−648; von Neumann, Annals of Math., 33(1931), pp 567−573.

最近 I. Gelfand ガ C. R. U. R. S. S. 25(1939) デコノ問題ヲ論ジテ居リマス。Gelfand ノ方法ハ群 $U_t$ ノ "Differentiation" ヲ用フルトイフ所ガ要点デアル様ニ思ハレル。(2) 然シ同ジ結果ハ "Differentiation" ノ代リニ "Integration" ヲ用フルコトニヨッテ、ヨリ精確ニ出セルコトヲ注意シタイ。

即チ Resolvents ヲ定義スル Stone ノ方法ガソノママ用ヒラレルノデアル。

$$\psi(\tau; z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} e^{-i\lambda\tau} d\lambda \ (\,Im(z) \neq 0)$$

---

(1) $U_t$ ガ weakly measurable ナラバ strongly continuous: $t \to t_0$ ナラバ $U_t \to U_{t_0}$ (strongly)

(2) D. S. Nathan, Duke Math. Journ., 1 (1936) ヲ参照サレタイ。

トスレバ

$$\psi(\tau;z)=\begin{cases}0 & \tau>0\\ ie^{-iz\tau} & \tau<0\end{cases}\quad (\mathrm{Im}(z)>0)$$

$$=\begin{cases}-ie^{-iz\tau} & \tau>0\\ 0 & \tau<0\end{cases}\quad (\mathrm{Im}(z)<0)$$

及ビ

$$(z-z')\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau;z)\psi(\sigma-\tau;z')d\tau$$

$$=\psi(\sigma;z)-\psi(\sigma;z')$$

今 $x\varepsilon E$, $f\varepsilon\bar{E}$ トシテ

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t;z)f(U_t x)\,dt\quad (\mathrm{Im}(z)\neq 0)$$

ヲ考ヘルト $F(f)$ ハ $\bar{E}$ ノ上デノ weakly continuous functional デアル。夫レハ次ノ様ニ考ヘレバ容易ニ分ル。

証明スベキコトハ $f_n\rightarrow f$ (weakly) ノ時 $F(f_n)\rightarrow F(f)$ デアル。$f_n\rightarrow f$ (weakly) ナラバ $\|f_n\|\leqq M$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

従ッテ $\varphi_n(t)=f_n(U_t x)$ ハ有界デ

$$|\varphi_n(t)|\leqq M\cdot\|f\|\cdot\|x\|=M_1,$$

$$\varphi_n(t)\longrightarrow\varphi(t)=f(U_t x)$$

従ッテ

$$\int\psi(t;z)f_n(U_t x)\,dt\rightarrow\int\psi(t;z)f(U_t x)\,dt.$$

($\psi(t;z)$ ハ absolutely integrable $(-\infty,\infty)$)

即チ $F(f_n) \longrightarrow F(f)$

依ッテ Banach ノ定理ニヨッテ $E$ ガ Separabe 又ハ regular ナラバ $X$ ニ對シテ $X_z \in E$ ガ存在シテ凡テノ $f \in \bar{E}$ ニ対シテ

$$F(f) = f(X_z)$$

ガ成立スル. $R_z \cdot X = X_z$ ト定義スレバ茲ニ complex number $z$ ($\mathfrak{Im}(z) \neq 0$) ニ対シテ一ツ宛 operator ガ定マル。(之ハ Hilbert 空間デ Resolvent ト呼バレル. Metric Ring ニ於ケル Resolvent ニツイテハ早ク南雲先生, 吉田氏ニヨッテ論ゼラレテキルコトハ周知デアラウ)。

1. $R_z$ ハ $E$ デ定義サレタ linear operator デアル:

$$|f(R_z \cdot x)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(U_t x)| \cdot |\psi(t;z)|\, dt$$

$$\leqq \frac{\|f\| \cdot \|x\|}{|\mathfrak{Im}(z)|},$$

$$\|R_z\| \leqq \frac{1}{|\mathfrak{Im}(z)|}$$

2. $(z - z') R_z R_{z'} = R_z - R_{z'}$. ($\mathfrak{Im}(z) \neq 0$, $\mathfrak{Im}(z') \neq 0$).

何トナレバ

$$f(R_z R_{z'} X) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t;z') f(U_t R_z X)\, dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s;z)\psi(t;z')f(U_{t+s}x)ds^{(2)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_t x)dt\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s;z)\psi(t-s;z')ds$$

$$(z-z')f(R_z R_{z'}x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_t x)(\psi(t;z)-\psi(t;z'))dt$$

故ニ　$(z-z')R_z R_{z'}=R_z-R_{z'}$

3. アル $z_1$, $(\mathcal{I}m(z_1)\neq 0)$ ニ対シテ $R_{z_1}x=0$ ナラバ

$x=0$

上ノ式ヲ用ヒテ $R_{z_1}x=0$ ナラバ $R_z x=0$ ガ凡テノ

$z$ $(\mathcal{I}m(z)\neq 0)$ ニ対シテ成立スルカラ 特ニ

$-\infty<\xi<\infty$ ニ対シテ

$$0=f(R_z x)-f(R_{\bar z}x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_t x)e^{-\eta|t|}e^{-i\xi t}\cdot dt,$$

$z=\xi+i\eta,\ \eta\neq 0$

依ッテ $f(U_t x)=0$ ガ凡テノ ( $f(U_t x)$ ハ連続!)

$t$ ニ対シテ成立ツ. 特ニ $t=0$ トスレバ $f(x)=0$,

$f\in\bar{E}$ ハ任意デアルカラ $x=0$

4. operator A.

---

(2) 茲デ $U_t R_z=R_z U_t$ 即チ $U_t$ ト integration トガ

commute スルコトヲ假定スル必要ハナイ。

コノ貴重ナ注意ハ三村氏カラ受ケタ。

$z_0$ ヲ $Im(z_0)\neq 0$ ナル一ツノ complex number トシ, $y=R_{z_0}x$ ($x$ ハ $E$ ノ任意ノ point) ヲ $x+z_0\cdot R_{z_0}x$ ニ對應セシメル operator ヲ A トスル:

$$y=R_{z_0}x,\quad Ay=x+z_0R_{z_0}x.$$

$x$ ガ $E$ 全体ヲ動クトキ $y=R_{z_0}x$ ハ $E$ デ dense set ヲ作ル. 從ッテ A ノ domain $D(A)$ ハ $E$ デ dense デアル. 何トナレバ $f\varepsilon\overline{E}$, $y\varepsilon D(A)$ ニ対シテ $f(y)=0$ トスレバ

$$f(y)=f(R_{z_0}x)=0,\quad x\varepsilon E;$$

特ニ $Im(z_0)>0$ ノトキハ

$$0=f(R_{z_0}U_tx)=i\int_{-\infty}^{0}e^{iz_0\tau}f(U_\tau U_tx)d\tau$$

$$=ie^{-iz_0t}\int_{-\infty}^{t}e^{iz_0s}f(U_sx)ds$$

ガ凡テノ $t$ ニ對シテ成立ツカラ $f(U_tx)=0$ 特ニ

$$f(x)=0\quad(x\varepsilon E).$$

依ッテ $f\equiv 0$

又, 明カニ A ハ additive.

5. $R_z(A-zI)y=(A-zI)R_zy=y.\quad(y=R_{z_0}x)$

簡單ナ計算デ,

$$R_z(A-zI)y=R_z(x+z_0R_{z_0}x-zR_{z_0}x),$$

$$(A-zI)R_zy=A(R_{z_0}(R_zx))-zR_zR_{z_0}x$$

$$=R_zx+z_0R_{z_0}R_zx-zR_zR_{z_0}x$$

$$R_z(A-zI)y=(A-zI)R_zy=R_zx+(z_0-z)R_zR_{z_0}x$$

$= R_z X + (R_{z_0} X - R_z X) = R_{z_0} X = y.$

ニヨッテ分ル.

6. A closed operator デアル。何トナレバ

$y_n = R_{z_0} x_n \to y,\quad A y_n = x_n + z_0 R_{z_0} x_n \to \bar{y}$

トスレバ $x_n = A y_n - z_0 y_n$ デアルカラ $x_n \to \bar{x}$,

従ッテ $y = R_{z_0} \bar{x}$, $A y_n = x_n + z_0 R_{z_0} x_n \to \bar{x} + z_0 R_{z_0} \bar{x}$

$= Ay.$

依ッテ A ハ closed.

7. A ノ定義ガ個々ノ $z_0$ ニ実際ハ depend シナイコトヲ示シタイ。之レニハ D(A) ガソウデアルコトヲ云ヘバヨイ. 何トナレバ $z_0 \to A$, $z_0' \to A'$ 且ツ

$D(A) \equiv D(A')$ ナラバ 5 ニヨッテ

$$R_z (A - zI) = I, \quad R_z (A' - zI) = I$$
$$\text{in } D(A) \equiv D(A')$$

カラ $R_z(A - A') = 0$, in $D(A) \equiv D(A')$,

§3 ニヨッテ

$$A = A' \quad \text{in } D(A) \equiv D(A').$$

$D(A) = D(A')$ ヲ示スニハ $D(A') \subset D(A)$ ヲ云ヘバヨイ。(反對ハ同ジコトデアル)

$y' = R_{z_0'} x \in D(A')$ ニ對シテ $y = R_{z_0} x \in D(A)$ ヲトレバ

$$y - y' = R_{z_0} x - R_{z_0'} x = (z_0 - z_0') R_{z_0} R_{z_0'} x$$

デ, $y \in D(A)$, $R_{z_0}(R_{z_0'} x)$, $\in D(A)$,

従ッテ $y' \in D(A)$.

故ニ $D(A') \subset D(A)$

8. 最后ニ"Differentiation"トノ関係ニツイテ

$$\lim_{t\to 0}\frac{U_t-1}{t}y=Ay \qquad y\varepsilon D(A)$$

ヲ証明シヨウ（Differentiation ニヨル方法デハ之レガ A ノ定義デアル）。

$y=R_{z_0}x$, $\mathfrak{Im}(z_0)>0$ トスル。

$$f\left(\frac{U_t-1}{t}R_{z_0}x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_\tau x)\frac{\psi(\tau-t;z_0)-\psi(\tau;z_0)}{t}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty},$$

$\psi(\tau;z)$ ノ定義ニヨッテ

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}=0,\quad \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{0}=z_0f(R_{z_0}x);$$

$$\int_{0}^{\varepsilon}f(U_\tau x)\frac{\psi(\tau-t;z_0)-\psi(\tau;z_0)}{t}d\tau$$

$$=\int_{0}^{\varepsilon}f(U_\tau x)\frac{\psi(\tau-t;z_0)}{t}d\tau$$

$$=\frac{1}{t}\int_{-t}^{0}f(U_{t+\sigma}x)\psi(\sigma;z_0)d\sigma$$

$$\lim_{t\to 0}\int_{0}^{\varepsilon}=f(U_0x)\psi(0;z_0)=f(x)$$

故ニ

$$\lim_{t\to 0}f\left(\frac{U_t-1}{t}\cdot R_{z_0}x\right)=f(x)+z_0f(R_{z_0}x)=f(Ay)$$

［注意］　$U_t$トAトノ直接ノ関係ニツイテハI. Gelfandハ

$$U_h = \exp(hA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n$$

ヲ証明シテヰル。茲デハコノ点ニハ立入ッナイコトニシタイ。